

# Łukasiewicz 命题逻辑中命题的 Choquet 积分真度理论

周红军<sup>1</sup>, 折延宏<sup>2</sup>

(1. 陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西西安 710062; 2. 西安石油大学理学院, 陕西西安 710065)

**摘 要:** 将已有的不确定性测度概念引入到了 Łukasiewicz 命题逻辑中的全体赋值之集上, 然后利用 McNaughton 函数关于该不确定性测度的 Choquet 积分定义了命题的 Choquet 积分真度概念. 证明了当赋值空间上的不确定性测度满足有限可加性时 Choquet 积分真度函数就具有良好性质, 由此可诱导出命题集上的一个伪距离, 进而可建立逻辑度量空间并展开程度化推理, 特别是证明了当赋值空间上的不确定性测度取为 Borel 概率测度时 Choquet 积分真度函数就退化为概率计量逻辑中的 Borel 概率真度函数. 本文是已有命题逻辑概率计量化工作的继续与深入, 为表示逻辑命题间不确定性的非线性关系提供了一种推理框架.

**关键词:** Łukasiewicz 命题逻辑; 概率计量逻辑; Choquet 积分真度

**中图分类号:** O142; TP181

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2013) 12-2327-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.12.002

## Theory of Choquet Integral Truth Degrees of Propositions in Łukasiewicz Propositional Logic

ZHOU Hong-jun<sup>1</sup>, SHE Yan-hong<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062, China;

2. College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an, Shaanxi 710065, China)

**Abstract:** The notion of Choquet integral truth degrees of propositions in Łukasiewicz propositional logic is introduced, by means of the Choquet integral of McNaughton functions with respect to uncertainty measures on the set of all valuations. When the involved uncertainty measures satisfy finite additivity property, the notion of Choquet integral truth degrees can induce in a natural way a pseudo-metric, with which the set of all propositions becomes a pseudo metric space and thus several graded reasoning methods can be established. The notion of Choquet integral truth degrees will reduce to the existing notion of Borel probability truth degrees in probabilistically quantitative logic when the uncertainty measures are Borel probability measures. This paper is a continuation of probabilistically quantitative logic and provides a possible framework for reasoning about non-linear uncertainty of propositions.

**Key words:** Łukasiewicz propositional logic; probabilistically quantitative logic; Choquet integral truth degree

### 1 引言

不确定性推理是人工智能领域中的核心研究课题之一. 从逻辑的角度看, 知识的不确定性主要指, 在描述命题的真假状态时, 由于知识的随机性、模糊性以及不完备性, 致使当事人无法准确判断该命题具体能取到哪些真值. 因此逻辑命题不确定性的表示问题就转化为如何将命题的各真值以恰当的方式聚合起来. 于是不确定性理论的各种数值模型(即不确定性测度), 特别是概率测度是逻辑学家们首选的工具. 把各种不确定性测度引

入到多值命题逻辑中将命题的所有真值聚合起来, 以给出逻辑命题为真程度的计量化刻画是近二十年的研究热点<sup>[1~13]</sup>.

文献[1~13]中的有关多值命题逻辑的计量化研究主要是基于命题真值函数关于全体赋值集上的不确定性测度, 特别是概率测度的 Lebesgue 积分建立的. 代表性的研究成果有: 美国斯坦福大学的学者 Adam 等通过把概率引入到二值命题逻辑中而提出的概率逻辑<sup>[1,2]</sup>; 意大利学者 Mundici 仿照经典概率中的 Kolmogorov 公理在 MV-代数中所提出的 state 理论<sup>[3]</sup>; 西班牙学者 Flaminio

等通过给 Łukasiewicz 命题逻辑中的命题纯形式地添加一个模态词以表示其概率所提出的模糊概率逻辑<sup>[4]</sup>;法国学者 Dubois 等把可能测度引入到二值命题逻辑中而提出的可能逻辑(possibilistic logic)<sup>[5]</sup>;我国学者李想等把可信测度引入到二值命题逻辑中而提出的可信逻辑(credibilistic logic)<sup>[6]</sup>;周春来把有限可加 belief 测度引入到二值命题逻辑中的概率逻辑<sup>[7]</sup>;王国俊等在多值命题逻辑系统中基于赋值集上的均匀概率测度空间的无穷可数乘积而提出的计量逻辑<sup>[8~10]</sup>以及本文作者等利用赋值集上的 Borel 概率测度所提出的较计量逻辑更为宽泛的概率计量逻辑理论<sup>[11~13]</sup>. 概率计量逻辑已在程度化推理、逻辑度量空间以及极大相容逻辑理论刻画等方面取得了丰富研究成果<sup>[14~25]</sup>. 同时, Mundici 的 state 理论近些年也发展十分迅速<sup>[26~30]</sup>. 值得注意的是, 尽管计量逻辑和 state 理论采取的方法不同, 但二者也有紧密联系. 事实上, 文献[28]已证明在 Łukasiewicz 命题逻辑中, 由有限个原子命题生成的全体命题之集上的 state 都是概率计量逻辑中的一个 Borel 型概率真度函数, 反之亦然. Flaminio 等人的模糊概率逻辑关于概率真度函数也是完备的<sup>[4]</sup>. 由此可见, 概率计量逻辑、state 理论以及模糊概率逻辑在 Łukasiewicz 命题逻辑中达到了统一, 它们都是基于 McNaughton 函数关于赋值空间上的 Borel 概率测度的 Lebesgue 积分而建立的. 由于可能逻辑与可信逻辑都是在二值命题逻辑系统中利用命题的标准模型之集上的测度引入的, 所以它们也可视为是基于命题真值函数关于相应不确定性测度(即, 可能测度与可信测度)的 Lebesgue 积分而建立的.

由于逻辑命题是有限长的符号串, 且逻辑推论也不涉及可数多个命题的交或并, 所以赋值空间上的 Borel 概率测度的可数可加性要求太强, 因而很多逻辑学家都不接受可数可加性<sup>[7]</sup>. 测度的有限可加性甚至都可以去掉, 因为现实生活中的不确定性信息间的依赖关系并非线性的, 因此仅用 Lebesgue 积分还不能准确地表示逻辑命题的不确定性. Choquet 积分作为 Lebesgue 积分的一种推广能有效地表示不确定性数据间的非线性关系, 所以若能通过命题真值函数关于赋值空间上的不确定性测度的 Choquet 积分将多值命题逻辑中命题的各真值聚合起来, 就能更准确地表示命题的不确定性, 从而为不确定性推理建立更为灵活、更为宽泛的计量的推理框架.

文献[31]在 Łukasiewicz 命题逻辑系统中建立了有限个给定变元的 McNaughton 函数关于有限维方体上的外正则 belief 测度的 Chouet 积分. 但由于 Łukasiewicz 命题逻辑中的命题变元是无限多的, 而有限维方体上的 belief 测度未必能唯一地扩张到整个赋值空间上<sup>[32]</sup>, 所以文献[31]未能给全体逻辑命题建立统一的计量化框架.

## 2 预备知识

设  $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ ,  $F(S)$  是由  $S$  生成的  $(\neg, \rightarrow)$  型自由代数, 其中,  $\neg$  是一元逻辑连接词,  $\rightarrow$  是二元连接词, 则称  $F(S)$  中的元为逻辑命题, 简称命题; 称  $S$  中的元为原子命题. 在 Łukasiewicz 命题逻辑(简记为  $\mathcal{L}$ )中, 由初始连接词  $\neg$  和  $\rightarrow$  还可引入新的连接词如下:

$$\begin{aligned} \text{设 } \varphi, \psi \in F(S), \\ \varphi \vee \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi; \\ \varphi \wedge \psi &= \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi); \\ \varphi \oplus \psi &= \neg \varphi \rightarrow \psi; \\ \varphi \otimes \psi &= \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi). \end{aligned}$$

由于本文的 Choquet 积分型计量化方法仍是从语义角度入手的, 所以本文暂不关心  $\mathcal{L}$  的语构理论, 只简单介绍它的语义理论.

对应于  $F(S)$  中的连接词  $\neg$  和  $\rightarrow$ , 在单位区间  $\mathcal{L}[0, 1]$  中定义运算  $\neg$  和  $\rightarrow$  如下:

$$\neg x = 1 - x, x \rightarrow y = \min\{1 - x + y, 1\}, x, y \in [0, 1].$$

则  $([0, 1], \neg, \rightarrow, 0, 1)$  为一 MV-代数, 称为  $\mathcal{L}$  的真值域. 在  $[0, 1]$  中还可进一步引入新运算:

$$\begin{aligned} x \vee y &= (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max\{x, y\}; \\ x \wedge y &= \neg(\neg x \vee \neg y) = \min\{x, y\}; \\ x \oplus y &= \neg x \rightarrow y = \min\{x + y, 1\}; \\ x \otimes y &= \neg(x \rightarrow \neg y) = \max\{x + y - 1, 0\}. \end{aligned}$$

称  $(\neg, \rightarrow)$  型同态  $v: F(S) \rightarrow ([0, 1], \neg, \rightarrow)$  为  $F(S)$  的赋值.  $F(S)$  的全体赋值之集记为  $\Omega$ . 易见每个赋值  $v$  也保持运算  $\vee, \wedge, \oplus, \otimes$  等. 在知识推理中, 称赋值为当事人所处的可能状态, 称  $\Omega$  为可能状态集.

由于  $F(S)$  是由  $S$  生成的自由代数, 所以一个赋值  $v \in \Omega$  完全由它在  $S$  上的限制  $v|_S$  决定. 设  $v_i = v(p_i), i \in N$ , 则得  $[0, 1]^\omega$  中的向量  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$ ; 反过来, 任取  $[0, 1]^\omega$  中的向量  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$ , 则存在唯一的  $v \in \Omega$ , 使得  $v(p_i) = v_i, i \in N$ . 由此一一对应, 可以把赋值  $v \in \Omega$  与其对应的向量  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$  不加区分, 从而  $\Omega = [0, 1]^\omega$ .

设  $\varphi, \psi \in F(S)$ , 若对任意赋值  $\mathbf{v} \in \Omega$  都有  $\mathbf{v}(\varphi) = 1$  ( $\mathbf{v}(\varphi) = 0$ ), 则称  $\varphi$  为重言式(矛盾式), 并把重言式  $\varphi$  记为  $\models \varphi$ . 若  $\models \varphi \rightarrow \psi$  且  $\models \psi \rightarrow \varphi$ , 则称  $\varphi$  与  $\psi$  逻辑等价, 记为  $\varphi \approx \psi$ .

设  $X_i = [0, 1] (i = 1, 2, \dots)$  并赋予其通常拓扑, 则全体赋值集  $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$  是通常乘积拓扑空间, 简称赋值空间. 设  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$  和  $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(X_i)$  分别表示  $\Omega$  和  $X_i$  中的全体 Borel 集之集, 则由文献[33]中的命题 8.1.5 知  $\mathcal{B}$  是由  $\Omega$  的拓扑基

$$\{A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots \mid A_i \in \mathcal{B}_i; 1 \leq i \leq n\}$$

$n \in N$  生成的  $\sigma$ -代数.

设  $\varphi \in F(S)$ , 则  $\varphi$  可视为  $\Omega$  上的实值函数(仍记为  $\varphi$ ):  $\Omega \rightarrow [0, 1]$ :

$$\varphi(v) = v(\varphi), \forall v \in \Omega.$$

$\varphi$  是  $\Omega$  上的连续函数, 从而是 Borel 可测的. 另一方面, 由于  $\mathbb{L}$  中的命题都是有限长的符号串, 即  $\varphi$  是由有限个原子命题(不妨设为  $p_1, \dots, p_n$ )经若干逻辑连接词连接而成, 记为  $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_n)$ . 则  $\varphi$  还可诱导出  $n$  维方体  $[0, 1]^n$  上的一  $n$  元函数  $\bar{\varphi}: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  如下:

$$\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = v(\varphi),$$

其中  $x_i = v(p_i), i = 1, \dots, n, v \in \Omega$ . 称  $\bar{\varphi}$  为  $\varphi$  诱导的真值函数, 亦称为  $\varphi$  的 McNaughton 函数. 易见,  $\bar{\varphi}$  是乘积空间  $[0, 1]^n$  上的连续函数, 从而也是 Borel 可测的. 由  $\bar{\varphi}$  的定义知,  $\forall \alpha \in [0, 1], \varphi^{-1}(\alpha) = \bar{\varphi}^{-1}(\alpha) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \in \mathcal{B}$ .

称函数  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  为  $\Omega$  上的不确定性测度, 若  $\mu$  满足:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = 1$ ;
- (2) 若  $A \subseteq B$ , 则  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

不确定性测度  $\mu$  又称为单调测度或模糊测度<sup>[34]</sup>. 称不确定性测度  $\mu$  是下连续的, 如果对  $\mathcal{B}$  中的单调递增序列  $\{A_i | i \in N\}$  有  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ ; 称  $\mu$  为上模的, 如果对任二  $A, B \in \mathcal{B}$  有

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A) + \mu(B);$$

称  $\mu$  为次模的, 如果对任二  $A, B \in \mathcal{B}$  有

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

如果上两式仅对不交集  $A, B$  成立, 则分别称  $\mu$  是上可加的和次可加的. 若  $\mu$  既上可加又次可加则称其为(有限)可加的. 不难验证, 可加性等价于上模 + 次模.

把上述两不等式推广到有限个子集  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$  有如下概念. 称不确定性测度  $\mu$  为  $k$  阶单调的, 如果对任意  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$  有

$$\mu(\bigcup_{i=1}^k A_i) + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \mu(\bigcap_{i \in I} A_i) \geq 0;$$

称  $\mu$  为  $k$  阶交错的, 如果对任意  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$  有

$$\mu(\bigcap_{i=1}^k A_i) + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \mu(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq 0.$$

称  $\mu$  为完全单调的, 如果  $\forall k \in N, \mu$  是  $k$  阶单调的. 完全单调的不确定性测度又称为 Belief 测度<sup>[35]</sup>. 对 Belief 测度有如下的等价刻画.

**命题 1** 设  $\mu$  是  $\Omega$  上的不确定性测度.  $\forall A, B \in \mathcal{B}$ , 定义  $\Delta_A \mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  为  $\Delta_A \mu(B) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$ . 则  $\mu$  是 Belief 测度当且仅当  $\forall k \in N$  及  $\forall A_1, \dots, A_k, B \in \mathcal{B}, \Delta_{A_1} \cdots \Delta_{A_k} \mu(B) \geq 0$ .

**证明** 由下式

$$\Delta_{A_1} \cdots \Delta_{A_k} \mu(B) = \mu(B) + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \mu(B \cap (\bigcap_{i \in I} A_i))$$
 容易验证.

下一节一些结论的证明还需要  $\mu$  在  $\Omega$  的幂集  $2^\Omega$  上诱导的不确定性测度, 即内、外不确定性测度.

定义  $\mu_*: 2^\Omega \rightarrow [0, 1], \mu^*: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  分别为

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) | B \in \beta, B \subseteq A\}, A \in 2^\Omega;$$

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) | A \subseteq B \in \beta\}, A \in 2^\Omega.$$

则  $\mu_*, \mu^*$  均为  $2^\Omega$  上的不确定性测度, 且均为  $\mu$  的扩张, 即  $\mu_* \upharpoonright_\beta = \mu^* \upharpoonright_\beta = \mu$ , 分别称为由  $\mu$  诱导的内、外测度. 可以验证, 若  $\mu$  是上模(上可加的), 则  $\mu_*$  也是上模(上可加的); 若  $\mu$  是次模的, 则  $\mu^*$  也是次模的.

设  $\mathcal{B}(n) = \mathcal{B}([0, 1]^n)$  表示  $n$  维乘积空间  $[0, 1]^n$  上的全体 Borel 集之集. 则  $\forall E \in \mathcal{B}(n), E \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \in \mathcal{B}$  由此,  $\Omega$  上的不确定性测度  $\mu$  可诱导出  $[0, 1]^n (n \geq 1)$  上的函数  $\mu(n): \mathcal{B}(n) \rightarrow [0, 1]$ :

$$\mu(n)(E) = \mu(E \times \prod_{i=1}^{\infty} X_i), \forall E \in \mathcal{B}(n).$$

则  $\mu(n)$  也满足不确定性测度的定义(1)和(2), 称为  $[0, 1]^n$  上的不确定性测度. 此外,  $\mu(n)$  的性质也由  $\mu$  决定.

**例 1** 设  $\mu_i$  是  $X_i = [0, 1]$  上的 Lebesgue 测度,  $i \in N, \mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots$  是  $\mu_i$  在  $\Omega = [0, 1]^\omega$  生成的(唯一)乘积测度<sup>[32]</sup>, 则  $\mu(n) = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$  是  $[0, 1]^n$  上的 Lebesgue 测度.

### 3 Choquet 积分真度

$\forall \varphi \in F(S), \forall \alpha \in [0, 1]$ , 由  $\varphi: \Omega \rightarrow [0, 1]$  的连续性知  $\varphi^{-1}([\alpha, 1]) \in \mathcal{B}$ , 从而  $\mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1]))$  有定义, 且关于  $\alpha$  单调不减, 所以  $\mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1]))$  在  $[0, 1]$  上 Riemann 可积, 记

$$(C) \int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^1 \mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) d\alpha.$$

该积分通常称为 Choquet 积分<sup>[34]</sup>.

**定义 1**  $\forall \varphi \in F(S)$ , 称

$$\tau(\varphi) = (C) \int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^1 \mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) d\alpha$$

为  $\varphi$  的 Choquet 积分真度.

**注 1** (1) 不妨设  $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_n)$ , 则  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ,

$$\varphi^{-1}([\alpha, 1]) = \bar{\varphi}^{-1}([\alpha, 1]) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i.$$

从而

$$\begin{aligned} \mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) &= \mu(\bar{\varphi}^{-1}([\alpha, 1]) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i) \\ &= \mu(n)(\bar{\varphi}^{-1}([\alpha, 1])), \end{aligned}$$

所以  $\tau(\varphi) = (C) \int_{[0,1]^n} \overline{\varphi} d\mu(n) = \int_0^1 \mu(n) (\overline{\varphi}^{-1}([ \alpha, 1 ])) d\alpha$ .

上式说明针对具体的逻辑命题(至多有限多个)时,其 Choquet 积分真度只取决于有限维方体  $[0,1]^n$  上不确定性测度  $\mu(n)$  的 Choquet 积分,因此为讨论方便我们可以只考虑  $[0,1]^n$  上的不确定性测度,有时也把  $\mu(n)$  简记为  $\mu$ .

(2) 由文献[34]中的定理 11.1 知

$$\tau(\varphi) = (C) \int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^1 \mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) d\alpha.$$

**例 2** 设  $\lambda$  是  $[0,1]^2$  上的 Lebesgue 测度,则  $\mu(2) = \lambda^2$  是  $[0,1]^2$  上的不确定性测度,但其不具有可加性.现计算  $\tau(p_1)$ ,  $\tau(p_1 \vee p_2)$ ,  $\tau(p_1 \wedge p_2)$ ,  $\tau(p_1 \rightarrow p_2)$  以及  $\tau((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg p_1 \vee p_2)$ .

**解** 注意  $\overline{p_1}$  也可扩张为  $[0,1]^2$  上的二元函数:

$$\overline{p_1}(x_1, x_2) = \overline{p_1}(x_1), \forall (x_1, x_2) \in [0,1]^2.$$

$$\begin{aligned} \tau(p_1) &= (C) \int_{[0,1]^2} \overline{p_1} d\mu = \int_0^1 \mu(\{(x_1, x_2) | x_1 \geq \alpha\}) d\alpha \\ &= \int_0^1 (\lambda(\{(x_1, x_2) | x_1 \geq \alpha\}))^2 d\alpha \\ &= \int_0^1 (1 - \alpha)^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(p_1 \vee p_2) &= (C) \int_{[0,1]^2} \overline{p_1 \vee p_2} d\mu \\ &= \int_0^1 \mu(\{(x_1, x_2) | x_1 \geq \alpha \text{ 或 } x_2 \geq \alpha\}) d\alpha \\ &= \int_0^1 (\lambda(\{(x_1, x_2) | x_2 \geq x_1, x_2 \geq \alpha\} \\ &\quad \cup \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2, x_1 \geq \alpha\}))^2 d\alpha \\ &= \int_0^1 (\lambda(\{(x_1, x_2) | x_2 \geq x_1, x_2 \geq \alpha\}) \\ &\quad + \lambda(\{(x_1, x_2) | x_1 > x_2, x_1 \geq \alpha\}))^2 d\alpha \\ &= \int_0^1 (1 - \alpha^2)^2 d\alpha \\ &= \frac{8}{15}; \end{aligned}$$

限于篇幅,其他命题的真度计算过程留给读者:

$$\tau(p_1 \wedge p_2) = \frac{1}{5}; \tau((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg p_1 \vee p_2) = \frac{4}{15};$$

$$\tau(p_1 \rightarrow p_2) = \frac{43}{60}.$$

由 Choquet 积分的基本性质<sup>[34]</sup>可得真度函数  $\tau$  的如下性质.

**命题 2**  $\tau$  具有下列性质:

- (1) 若  $\varphi$  是布尔命题,则  $\tau(\varphi) = \mu(\varphi^{-1}(1))$ ;
- (2) 若  $\varphi$  是重言式(矛盾式),则  $\tau(\varphi) = 1$ ( $\tau(\varphi) = 0$ );

(3) 若  $\varphi \rightarrow \psi$  是重言式,则  $\tau(\varphi) \leq \tau(\psi)$ ,从而逻辑等价的命题有相同的真度;

(4) 若  $\mu$  是上模的,则  $\tau$  也是上模的,即  $\tau(\varphi \vee \psi) + \tau(\varphi \wedge \psi) \geq \tau(\varphi) + \tau(\psi)$ ;

(5) 若  $\mu$  是次模的,则  $\tau$  也是次模的,即  $\tau(\varphi \vee \psi) + \tau(\varphi \wedge \psi) \leq \tau(\varphi) + \tau(\psi)$ ;

(6) 若  $\mu$  是上可加(次可加的),则  $\tau$  也是上可加(次可加的);由此,若  $\mu$  是可加的,则  $\tau$  也是可加的.

(7) 若  $\mu$  是  $k$  阶单调的,则  $\tau$  也是  $k$  阶单调的,即  $\tau(\bigvee_{i=1}^k \varphi_i) + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \tau(\bigwedge_{i \in I} \varphi_i) \geq 0$ ;

(8) 若  $\mu$  是  $k$  阶交错的,则  $\tau$  也是  $k$  阶交错的,即  $\tau(\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i) + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \tau(\bigvee_{i \in I} \varphi_i) \leq 0$ ;

(9) 若  $\mu$  是完全单调的,则  $\tau$  也是完全单调的,即  $\forall k \in N, \tau$  是  $k$  阶单调的.

**命题 3** 设  $\mu$  是上模的,  $\varphi, \psi \in F(S)$ , 则:

(1) 若  $\varphi \otimes \psi$  是矛盾式,则

$$\tau(\varphi \oplus \psi) \geq \tau(\varphi) + \tau(\psi);$$

(2)  $\tau(\varphi) + \tau(\neg \varphi) \leq 1$ .

**证明** (1) 设  $\varphi \otimes \psi$  是矛盾式,则  $\varphi, \psi$  和  $\varphi \oplus \psi$  作为  $\Omega$  上的函数满足  $\varphi \oplus \psi = \varphi + \psi$ . 由  $\mu$  是上模的知,其内测度  $\mu_*$  也是上模的,从而由文献[34]中的推论 6.4 知

$$(C) \int_{\Omega} (\varphi + \psi) d\mu_* \geq (C) \int_{\Omega} \varphi d\mu_* + (C) \int_{\Omega} \psi d\mu_*.$$

$\forall \alpha$ , 由  $(\varphi + \psi)^{-1}([\alpha, 1])$ ,  $\varphi^{-1}([\alpha, 1])$ ,  $\psi^{-1}([\alpha, 1]) \in \mathcal{B}$ , 以及  $\mu_* \upharpoonright_{\mathcal{B}} = \mu$  得

$$\begin{aligned} \tau(\varphi \oplus \psi) &= (C) \int_{\Omega} (\varphi \oplus \psi) d\mu = (C) \int_{\Omega} (\varphi + \psi) d\mu \\ &= (C) \int_{\Omega} (\varphi + \psi) d\mu_* \\ &\geq (C) \int_{\Omega} \varphi d\mu_* + (C) \int_{\Omega} \psi d\mu_* \\ &= (C) \int_{\Omega} \varphi d\mu + (C) \int_{\Omega} \psi d\mu \\ &= \tau(\varphi) + \tau(\psi). \end{aligned}$$

(2) 由  $\varphi \oplus \neg \varphi$  为重言式及  $\varphi \otimes \neg \varphi$  为矛盾式即得.

**命题 4** 设  $\mu$  是可加的,  $\varphi, \psi \in F(S)$ , 则:

(1) 命题 3 中的不等号都可改为等号;

(2)  $\tau(\varphi \oplus \psi) + \tau(\varphi \otimes \psi) = \tau(\varphi) + \tau(\psi)$ ;

(3)  $1 + \tau(\varphi \wedge \psi) = \tau(\varphi) + \tau(\varphi \rightarrow \psi)$ ;

(4)  $\tau(\varphi) + \tau(\varphi \rightarrow \psi) = \tau(\psi) + \tau(\psi \rightarrow \varphi)$ ;

(5)  $\tau(\varphi) + \tau(\psi) = \tau(\varphi \vee \psi) + \tau(\varphi \wedge \psi)$ ;

(6) 若  $\tau(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ , 则  $\tau(\varphi) \leq \tau(\psi)$ .

**证明**

(1) 设  $\varphi \otimes \psi$  是矛盾式. 则  $\varphi, \psi$  均为上  $\mu$ -可测的, 即  $\forall \alpha \in [0,1], \mu_*(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) = \mu^*(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) = \mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1]))$ .

所以由文献[34]中的推论 6.5 知

$$(C) \int_{\Omega} (\varphi + \psi) d\mu = (C) \int_{\Omega} \varphi d\mu + (C) \int_{\Omega} \psi d\mu,$$

即  $\tau(\varphi \oplus \psi) = \tau(\varphi) + \tau(\psi)$ .

令  $\psi = \neg \varphi$ , 即得  $\tau(\varphi) + \tau(\neg \varphi) = 1$ .

(2) 考虑以下事实( $\bar{0}$ 表示矛盾式):

$$\varphi \approx ((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \psi) \oplus (\varphi \otimes \psi);$$

$$(\varphi \oplus \psi) \otimes (\neg \psi) \otimes \varphi \approx \bar{0};$$

$$\psi \approx ((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \varphi) \oplus (\varphi \otimes \psi);$$

$$(\varphi \oplus \psi) \otimes (\neg \varphi) \otimes \varphi \approx \bar{0};$$

$$((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \psi) \otimes ((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \varphi) \approx \bar{0};$$

$$[(\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \psi] \oplus [(\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \varphi] \otimes (\varphi \otimes \psi) \approx \bar{0};$$

$$\varphi \oplus \psi \approx [(\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \psi] \oplus [(\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \varphi] \oplus$$

$(\varphi \otimes \psi)$ . 所以, 由命题 4(1) 得

$$\tau(\varphi) + \tau(\psi)$$

$$\begin{aligned} &= \tau((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \psi) + \tau((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \varphi) + 2\tau(\varphi \otimes \psi) \\ &= \tau(((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \psi) \oplus ((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \varphi)) + 2\tau(\varphi \otimes \psi) \\ &= \tau(((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \psi) \oplus ((\varphi \oplus \psi) \otimes \neg \varphi) \oplus (\varphi \otimes \psi)) \\ &\quad + \tau(\varphi \otimes \psi) \\ &= \tau(\varphi \oplus \psi) + \tau(\varphi \otimes \psi). \end{aligned}$$

(3) 由  $\varphi \wedge \psi \approx (\neg \varphi \oplus \psi) \otimes \varphi$ ,  $\vdash (\neg \varphi \oplus \psi) \oplus \varphi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi \approx \neg \varphi \oplus \psi$  及命题 4 (2) 得

$$\begin{aligned} 1 + \tau(\varphi \wedge \psi) &= \tau((\neg \varphi \oplus \psi) \oplus \varphi) + \tau((\neg \varphi \oplus \psi) \otimes \varphi) \\ &= \tau(\varphi) + \tau(\neg \varphi \oplus \psi) = \tau(\varphi) + \tau(\varphi \rightarrow \psi). \end{aligned}$$

(4) 由命题 4 (3) 知(4)成立.

$$\begin{aligned} (5) \text{ 由 } \varphi \vee \psi &\approx \neg(\neg \varphi \oplus \psi) \oplus \psi, \\ &\quad \neg(\neg \varphi \oplus \psi) \otimes \psi \approx \bar{0} \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} \tau(\varphi \vee \psi) &= \tau(\neg(\neg \varphi \oplus \psi) \oplus \psi) \\ &= \tau(\neg(\neg \varphi \oplus \psi)) + \tau(\psi) \\ &= 1 - \tau(\neg \varphi \oplus \psi) + \tau(\psi) \\ &= 1 - \tau(\varphi \rightarrow \psi) + \tau(\psi). \end{aligned}$$

另一方面, 由命题 4(3) 知

$$\tau(\varphi \wedge \psi) = \tau(\varphi) + \tau(\varphi \rightarrow \psi) - 1.$$

所以命题 4(5) 成立.

(6) 由命题 4(4) 知

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \tau(\varphi) + \tau(\varphi \rightarrow \psi) - \tau(\psi \rightarrow \varphi) \\ &= \tau(\varphi) + 1 - \tau(\psi \rightarrow \varphi) \\ &\geq \tau(\varphi). \end{aligned}$$

**注 2** 由命题 2(2) 和命题 4(1), (2) 知当  $\mu$  只满足有限可加性时  $\tau$  就是 Mundici 的一个 state<sup>[3]</sup>, 但文献[28]中的 Lebesgue 积分表示定理只是针对由有限个原子命题生成的全体命题之集上的 state 给出的, 而我们的  $F(S)$  是含有无限多原子命题的. 至于文献[28]中的结论能否推广到  $F(S)$  上本文尚无定论. 但可以证明当  $\mu$  是 Borel 概率测度时 Choquet 积分就退化为 Lebesgue 积分.

**定理 1** 设  $\mu$  是  $\Omega$  上的 Borel 概率测度, 则

$$\tau(\varphi) = \int_0^1 \mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) d\alpha = \int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_{[0,1]^n} \bar{\varphi} d\mu(n).$$

**证明** 由注 1(2), 只须证

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^1 \mu(\varphi^{-1}([\alpha, 1])) d\alpha = \int_0^1 \mu(\varphi > \alpha) d\alpha.$$

由  $\varphi: \Omega \rightarrow [0, 1]$  的 Borel 连续性知,  $\varphi$  是 Borel 概率空间  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  上的随机变量函数. 令  $F_{\varphi}(\alpha) = \mu(\varphi \leq \alpha)$  为  $\varphi$  的分布函数, 则  $F_{\varphi}(\alpha)$  关于  $\alpha$  是单调递增和左连续的, 从而在  $[0, 1]$  上 Riemann 可积且

$$\int_0^1 \mu(\varphi > \alpha) d\alpha = 1 - \int_0^1 F_{\varphi}(\alpha) d\alpha.$$

由分部积分和随机变量函数的数学期望的定义得

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_{\varphi}(\alpha) d\alpha &= \alpha F_{\varphi}(\alpha) \Big|_0^1 - \int_0^1 \alpha dF_{\varphi}(\alpha) \\ &= 1 - \int_0^1 \alpha f_{\varphi}(\alpha) d\alpha \\ &= 1 - \int_{\Omega} \varphi d\mu. \end{aligned}$$

上式中  $f_{\varphi}$  为  $\varphi$  的概率密度函数, 从而定理得证.

### 4 逻辑度量空间

设  $\mu$  是  $\Omega$  上的不确定性测度,  $\varphi, \psi \in F(S)$ , 定义

$$\rho(\varphi, \psi) = 1 - \tau((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

**命题 5** 若  $\mu$  满足对偶公理, 即  $\mu(A) + \mu(A^c) = 1, \forall A \in \mathcal{B}$ , 则

$$\rho(\varphi, \psi) = (C) \int_{\Omega} |\varphi - \psi| d\mu.$$

**证明** 首先不难验证, 命题  $\varphi, \psi$  作为  $\Omega$  上的函数满足:

$$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) = 1 - |\varphi - \psi|.$$

所以,

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, \psi) &= 1 - \tau((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\ &= 1 - \int_0^1 \mu(((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))^{-1}([\alpha, 1])) d\alpha \\ &= 1 - \int_0^1 \mu((1 - |\varphi - \psi|)^{-1}([\alpha, 1])) d\alpha \\ &= 1 - \int_0^1 \mu(|\varphi - \psi|^{-1}([0, 1 - \alpha])) d\alpha \\ &= 1 - \int_0^1 \mu(|\varphi - \psi|^{-1}([0, \beta])) d\beta \\ &= \int_0^1 \mu(|\varphi - \psi|^{-1}([\beta, 1])) d\beta \\ &= (C) \int_{\Omega} |\varphi - \psi| d\mu. \end{aligned}$$

**命题 6** 若  $\mu$  是次模的,  $\varphi, \psi \in F(S)$ , 则

$$|\tau(\varphi) - \tau(\psi)| \leq (C) \int_{\Omega} |\varphi - \psi| d\mu.$$

**证明** 由文献[34]中的推论 6.6 可得.

设  $\mu$  是可加的, 则可验证  $\rho$  是个伪距离, 从而可以

建立逻辑伪度量空间,进而展开程度化推理研究.

**定理 2** 设  $\mu$  是可加测度,则:

(1)  $\rho$  是  $F(S)$  上的伪距离;

(2) 在伪度量空间  $(F(S), \rho)$  中,逻辑连接词  $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \oplus, \otimes$  都是连续的.

**证明**(1)只需证三角不等式.由文献[34]中推论 6.5 知

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, \chi) &= (C) \int_{\Omega} |\varphi - \chi| d\mu. \\ &\leq (C) \int_{\Omega} (|\varphi - \psi| + |\psi - \chi|) d\mu \\ &= (C) \int_{\Omega} |\varphi - \psi| d\mu + (C) \int_{\Omega} |\psi - \chi| d\mu \\ &= \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi). \end{aligned}$$

(2) 由于  $|\neg\varphi - \neg\psi| = |\varphi - \psi|$ , 所以  $\rho(\neg\varphi, \neg\psi) = \rho(\varphi, \psi)$ , 这说明  $\neg$  是连续的. 不难验证

$$|(\varphi \rightarrow \psi) - (\chi \rightarrow \gamma)| \leq |\varphi - \chi| + |\psi - \gamma|.$$

由前面的证明知  $\rho(\varphi \rightarrow \psi, \chi \rightarrow \gamma) \leq \rho(\varphi, \chi) + \rho(\psi, \gamma)$ . 从而当  $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\varphi_i, \varphi) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\psi_i, \psi) = 0$  时

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\varphi_i \rightarrow \psi_i, \varphi \rightarrow \psi) = 0.$$

这就证明了  $\rightarrow$  是连续的. 由于  $\vee, \wedge, \oplus, \otimes$  都可由  $\neg, \rightarrow$  来表达, 所以它们也都是连续的.

## 5 程度化推理

文献[14]在 Łukasiewicz 命题逻辑中以真度理论为工具提出了基于演绎定理的程度化推理方法,但这种方法只适用于有限理论. 随后文献[16, 17]克服了这一困难,提出了三种从一般理论出发的程度化推理方法,并研究了其关系. 文献[16, 17]中的这些推理方法在本文的框架下也成立.

设  $\mu$  是可加测度,  $\Gamma \subseteq F(S)$ , 称为理论,  $2^{(\Gamma)}$  为  $\Gamma$  的全体有限子理论之集.  $\forall \Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \in 2^{(\Gamma)}$ , 令  $\omega(k) = (i_1, \dots, i_k) \in N^k$ , 并假定  $\omega(0) = \emptyset$ . 设  $\varphi \in F(S)$ , 令

$$\Sigma(\omega(k)) \rightarrow \varphi = \begin{cases} \varphi_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k}^k, & k \geq 1, \\ \varphi, & k = 0. \end{cases}$$

定义

$$\text{Ed}(\Gamma, \varphi) = \sup\{\tau(\Sigma(\omega(k)) \rightarrow \varphi) \mid \Sigma \in 2^{(\Gamma)}\},$$

称为  $\Gamma$  关于  $\varphi$  的语义蕴涵度.

**定理 3** 设  $\mu$  是可加测度,  $\Gamma \subseteq F(S)$ ,  $D(\Gamma)$  为  $\Gamma$  的全体结论之集<sup>[10]</sup>,  $\bar{0}$  为矛盾式, 则:

(1)  $\text{Ed}(\Gamma, \varphi) = 1 - \sup\{\tau(\psi \rightarrow \varphi) \mid \psi \in D(\Gamma)\}$ ;

(2)  $\text{Ed}(\Gamma, \varphi) = 1 - \rho(\varphi, D(\Gamma))$ ;

(3)  $\text{Ed}(\Gamma, \bar{0}) = \sup\{\rho(\psi, \chi) \mid \psi, \chi \in D(\Gamma)\}$ .

**证明** 由定理 2 可类似于文献[16, 17]进行证明.

另外, 利用  $F(S)$  上的 Hausdorff 距离还可引入一种程度化方法, 请参见文献[10].

## 6 结束语

本文利用 Łukasiewicz 命题逻辑中的 McNaughton 函数关于赋值空间上的一般不确定性测度的 Choquet 积分引入了命题的 Choquet 积分真度概念, 研究了其基本性质, 特别是证明了有限可加测度定义的真度函数就具有良好的性质, 由此可以建立逻辑度量空间并展开程度化推理理论. 只用到不确定性测度的有限可加性也是和命题逻辑中每个命题都是有限长符号串并且也不涉及无限可数多个命题的交或并的事实相吻合的. 特别是, 本文还证明了由赋值空间上的 Borel 概率测度定义的 Choquet 积分真度函数实为概率计量逻辑中的概率真度函数, 这一结论说明本文建立的逻辑推理框架较概率计量逻辑要宽泛的多.

### 参考文献

- [1] Fagin R, Halpern J Y, Megiddo N. A logic for reasoning about probabilities[J]. Information and Computation, 1990, 87(1-2): 78-128.
- [2] Adam E W. A Primer of Probability Logic[M]. Stanford: CSLI Publications, 1998. 11-34.
- [3] Mundici D. Averaging the truth-value in Łukasiewicz logic[J]. Studia Logica, 1995, 55(1): 113-127.
- [4] Flaminio T, Godo L. A logic for reasoning about the probability of fuzzy events[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(6): 625-638.
- [5] Dubois D, Prade H. Possibilistic logic: A retrospective and prospective view[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 144(1): 3-23.
- [6] Li X, Liu B D. Foundation of credibilistic logic[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2009, 8(1): 91-102.
- [7] Zhou C L. Probability logic of finitely additive beliefs[J]. Journal of Logic, Language and Information, 2010, 19(3): 247-282.
- [8] 王国俊. 计量逻辑学(I)[J]. 工程数学学报, 2006, 23(2): 191-215.  
Wang G J. Quantitative logic (I) [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 191-215. (in Chinese)
- [9] Wang G J, Zhou H J. Quantitative logic[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 226-247.
- [10] Wang G J, Zhou H J. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle [M]. Beijing: Science Press and Alpha Science International Limited, 2009. 200-256.
- [11] 周红军, 王国俊. Borel 型概率计量逻辑[J]. 中国科学: 信息科学, 2011, 41(11): 1328-1342.  
Zhou Hong-jun, Wang Guo-jun. Borel probabilistic and quantitative logic [J]. Science China: Information Sciences, 2011, 54(9): 1843-1854.
- [12] 周红军. Łukasiewicz 命题逻辑中命题的 Borel 概率真度理论和极限定理[J]. 软件学报, 2012, 23(9): 2235-2247.  
Zhou Hong-jun. Theory of Borel probability truth degrees of

- propositions in Łukasiewicz propositional logics and a limit theorem[J]. *Journal of Software*, 2012, 23(9): 2235 – 2247. (in Chinese)
- [13] 周红军. 概率计量逻辑[D]. 西安: 陕西师范大学数学与信息科学学院, 2009. 31 – 76.  
Zhou Hong-jun. Probabilistically Quantitative Logic[D]. Xi'an: Shaanxi Normal University, 2009. 31 – 76. (in Chinese)
- [14] 王国俊, 宋建社. 命题逻辑的程度化方法[J]. *电子学报*, 2006, 34(2): 252 – 257.  
Wang Guo-jun, Song Jian-she. Graded method in propositional logic[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(2): 252 – 257. (in Chinese)
- [15] 张东晓, 李立峰. 二值命题逻辑公式的语构程度化方法[J]. *电子学报*, 2008, 36(2): 325 – 330.  
Zhang Dong-xiao, Li Li-feng. Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(2): 325 – 330. (in Chinese)
- [16] Zhou H J, Wang G J. Generalized consistency degrees of theories in several standard complete logic systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157(15): 2058 – 2073.
- [17] Zhou H J, Wang G J, Zhou W. Consistency degrees of theories and methods of graded reasoning in  $n$ -valued  $R_0$ -logic[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2006, 43(1): 117 – 132.
- [18] 刘华文, 王国俊, 张诚一. 几种逻辑系统中的近似推理理论[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2007, 42(7): 1 – 6.  
Liu Hua-wen, Wang Guo-jun, Zhang Cheng-yi. Approximate reasoning in several logic systems[J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2007, 42(7): 1 – 6. (in Chinese)
- [19] Wu H B. The generalized truth degree of quantitative logic in the logic system  $L_n^*$  ( $n$ -valued NM-logic system)[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59(8): 2587 – 2596.
- [20] Wang G J. A unified integrated method for evaluating goodness of propositions in several propositional logic systems and its applications[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2012, 21(2): 195 – 201.
- [21] 李璧镜, 王国俊. 正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间[J]. *电子学报*, 2010, 38(3): 497 – 502.  
Li Bi-jing, Wang Guo-jun. Logic pseudo-metric spaces of regular implication operators[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(3): 497 – 502. (in Chinese)
- [22] She Y H, Wang G J, He X L. Topological characterization of consistency of logic theories in  $n$ -valued Łukasiewicz logic  $\mathbb{L}_k(n)$ [J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2010, 19(3): 427 – 430.
- [23] 胡明娣, 王国俊. 对称逻辑公式在经典逻辑度量空间中的分布[J]. *电子学报*, 2011, 39(2): 419 – 423.  
Hu Ming-di, Wang Guo-jun. Distribution of the symmetrical logic formulas in the classical logic metric space[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(2): 419 – 423. (in Chinese)
- [24] Zhou H J, Wang G J. Characterization of maximal consistent theories in the formal deductive system  $L^*$  (NM-logic) and Cantor space[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(23): 2591 – 2604.
- [25] 周红军. 形式系统  $L^*$  中极大相容逻辑理论的拓扑刻画[J]. *电子学报*, 2011, 39(12): 2895 – 2899.  
Zhou Hong-jun. Topological characterizations of maximally consistent theories in the formal deductive system  $L^*$ [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(12): 2895 – 2899. (in Chinese)
- [26] Riečan B. On the probability on BL-algebras[J]. *Acta Math Nitra*, 2000, 4: 3 – 13.
- [27] Georgescu G. Bosbach states on fuzzy structures[J]. *Soft Computing*, 2004, 8(3): 217 – 230.
- [28] Panti G. Invariant measures in free MV-algebras[J]. *Communications in Algebra*, 2008, 36(8): 2849 – 2861.
- [29] Liu L Z. States on finite monoidal  $t$ -norm based algebras[J]. *Information Sciences*, 2011, 181(7): 1369 – 1383.
- [30] Zhou H J, Zhao B. Generalized Bosbach and Riečan states based on relative negations in residuated lattices[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 187(1): 33 – 57.
- [31] Kroupa T. Extension of belief functions to infinite-valued events[J]. *Soft Computing*, 2012, 16(11): 1851 – 1861.
- [32] Halmos P R. *Measure Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1974. 137 – 160.
- [33] Cohn D L. *Measure Theory*[M]. Boston: Birkhäuser, 1980. 251 – 259.
- [34] Denneberg D. *Non-additive Measure and Integral*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. 61 – 92.
- [35] Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976. 35 – 73.

#### 作者简介



周红军 男, 1980年3月生于山东莘县. 现为陕西师范大学数学与信息科学学院副教授, 研究方向为不确定性推理.

E-mail: hjzhou@snnu.edu.cn; sdzhjun@gmail.com



折延宏 男, 1983年5月出生陕西延安市. 现为西安石油大学理学院讲师, 研究方向为不确定性推理.

E-mail: sheyanhong@gmail.com